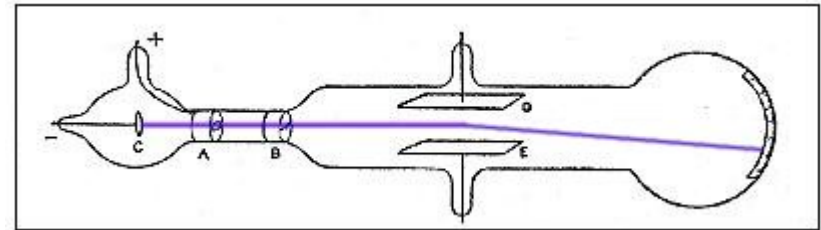
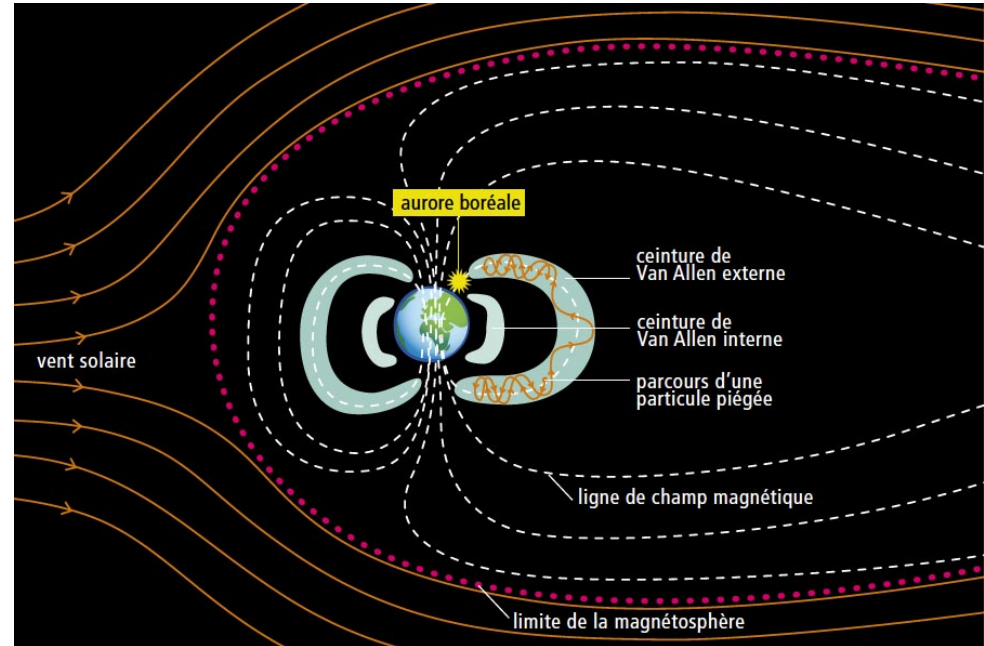
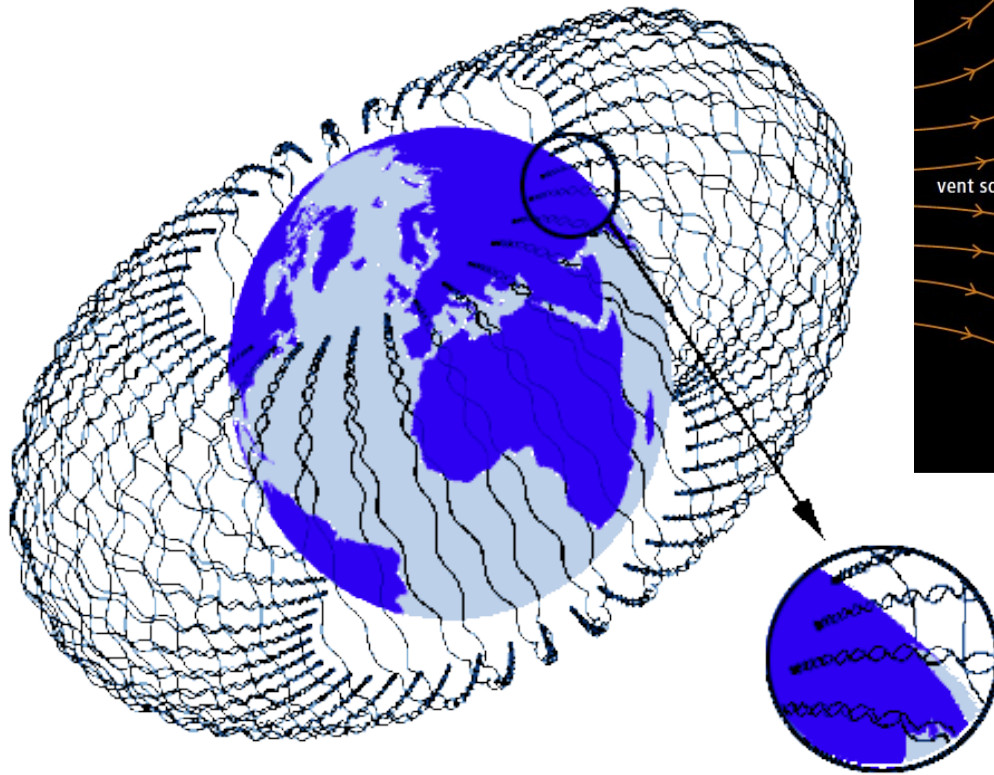


Mouvement de particules chargées dans les champs électrique et magnétique



1-Force de Lorentz

1-1 Formulation

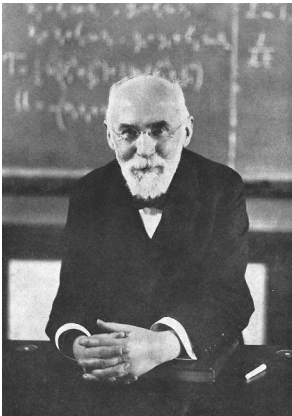
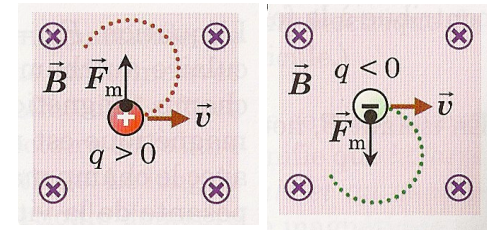
Soit une particule de charge q , de masse m , animée d'une vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}_g$, en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$. Elle est soumise à la **force de Lorentz**:



$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right]$$

Remarques:

- Les expressions de $\vec{F}$, q et m ne dépendent pas du référentiel $\mathfrak{R}$ de travail
- Les expressions de $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$ dépendent du référentiel $\mathfrak{R}$ de travail
- E/B est homogène à une vitesse



Hendrik Antoon Lorentz (né le 18 juillet 1853 à Arnhem, Pays-Bas ; mort le 4 février 1928 à Haarlem, Pays-Bas) est un physicien qui reçut en 1902 le prix Nobel de physique et en 1908 la Médaille Rumford. Il fut lauréat de la Médaille Franklin en 1917 pour ses travaux sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Il reçut également la médaille Copley en 1918. La majorité de ses travaux portèrent sur l'électromagnétisme. Il a laissé son nom aux transformations de Lorentz qui sont à la base de la théorie de la relativité restreinte.

1-Force de Lorentz

1-2 Puissance de la force de Lorentz

$$\bullet P = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} + q \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0 \text{ car } \vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}} \Rightarrow \boxed{P = q \vec{E} \cdot \vec{v}}$$

La force électrique travaille, la force magnétique ne travaille pas

→ La force électrique :

- permet d'accélérer ou de décélérer une particule, c'est à dire de modifier $\|\vec{v}\|$
- permet de modifier la trajectoire de la particule, c'est-à-dire de modifier la direction de $\vec{v}$

→ La force magnétique :

- ne permet pas d'accélérer ou de décélérer une particule
- permet de modifier la trajectoire d'une particule en modifiant la direction de $\vec{v}$ (mais pas sa norme)

• Si $\vec{E}$ seul ($\vec{F}_E = q\vec{E}$ est une force conservative)

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{\Delta \varepsilon_p}_{\text{variation de l'énergie potentielle du système particule-champ électrique}} = \varepsilon_{pb} - \varepsilon_{pa} = - \underbrace{q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}_{\text{travail de la force électrostatique}} \\ \underbrace{\Delta V}_{\text{variation du potentiel électrostatique du système particule-champ électrique}} = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \end{array} \right\}$$

Définition du potentiel électrostatique : $V \equiv \frac{\varepsilon_p}{q}$

$$\boxed{\varepsilon_m = \varepsilon_c + \varepsilon_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante}} \quad \left(\text{si } \vec{E} = \overrightarrow{cste}, \Delta V = -E \int_a^b d\vec{\ell} = -Ed \right)$$

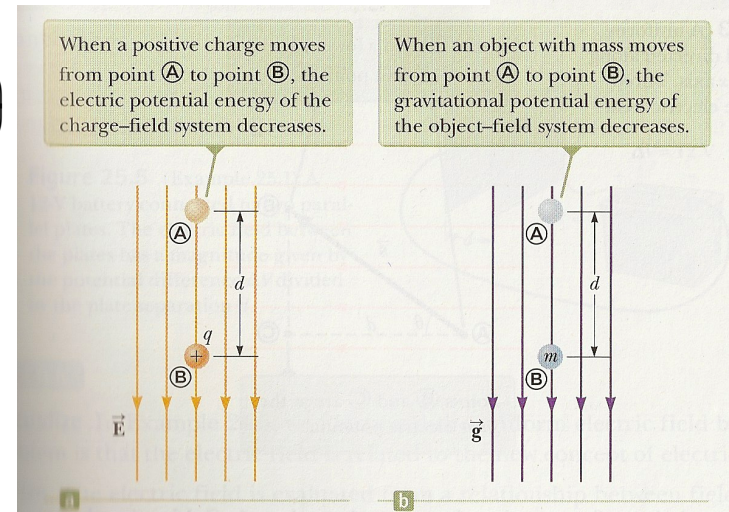
• Si $\vec{B}$ seul

$$P = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

Théorème de la puissance cinétique: $d\varepsilon_c/dt = d(mv^2/2)/dt = P = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{v}\| = v = \text{constante}}$$

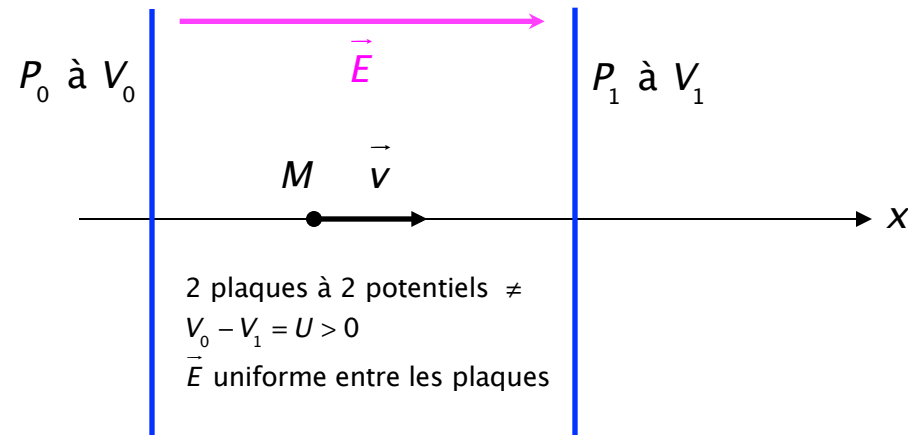
Figure 25.2 (a) When the electric field $\vec{E}$ is directed downward, point B is at a lower electric potential than point A. (b) A gravitational analog to the situation in (a).



2-Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

2-1 Rôle accélérateur

cas étudié: $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$



$$x(t) = \frac{q}{2m} E t^2 + v_0 t \quad (qE > 0) \quad \text{Mouvement rectiligne uniformément accéléré}$$

• Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + q V_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + q V_1 \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m} U$$

$v_1 > v_0$ car $U = V_0 - V_1 > 0$ et $q > 0$

Soit un proton $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg et $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C
A $t = 0$, le proton est en O avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$
 $\vec{v}_1$ quand proton en P_1 ?

• Application de la 2ème loi de Newton

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}_0 t + \underbrace{\vec{r}_0}_0$$

• Limite relativiste Si $v_0 = 0$, $v = \frac{q}{m} E t \Rightarrow v(t = \infty) = \infty$!!!

Calcul classique valable si $v/c \ll 1$

On se fixe comme critère $v/c < 0,1$

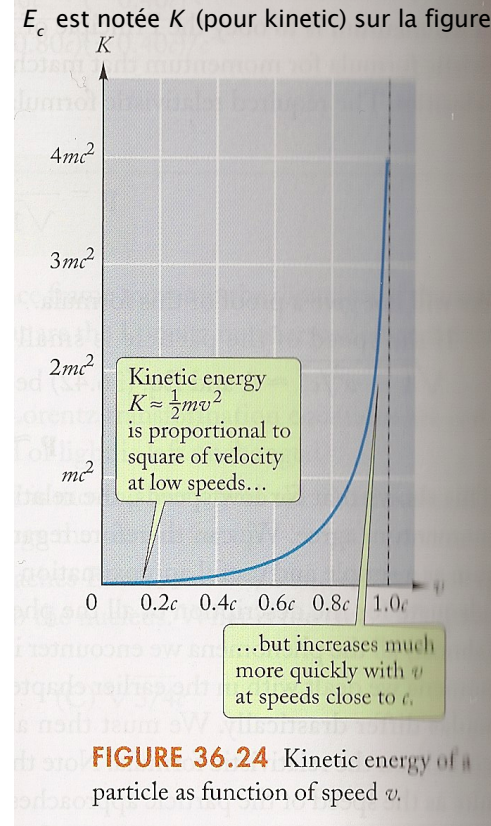
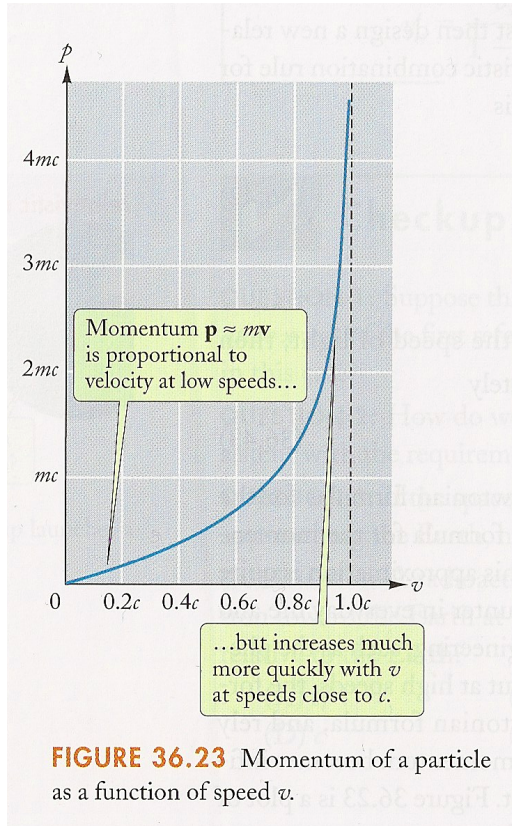
$$v = \sqrt{\frac{2q}{m} U} < 0,1c \Rightarrow U < 0,01 \frac{mc^2}{2q}$$

→ Proton $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg $U < 4,7 \times 10^6$ V

→ Electron $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg $|U| < 2500$ V

2-Mouvement d' une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

2-3 Limitation relativiste



Pour une particule libre en mouvement, l'énergie totale vaut:

$$\varepsilon \equiv mc^2 + \varepsilon_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

On peut l'exprimer en fonction de la quantité de mouvement relativiste:

$$\varepsilon \equiv \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

Un électron d'un tube cathodique d'une ancienne TV a une vitesse de $1,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Que vaut la norme de sa quantité de mouvement ? Comparer au cas classique.

$$\vec{p} \equiv \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \underset{v \ll c}{\approx} m\vec{v}$$

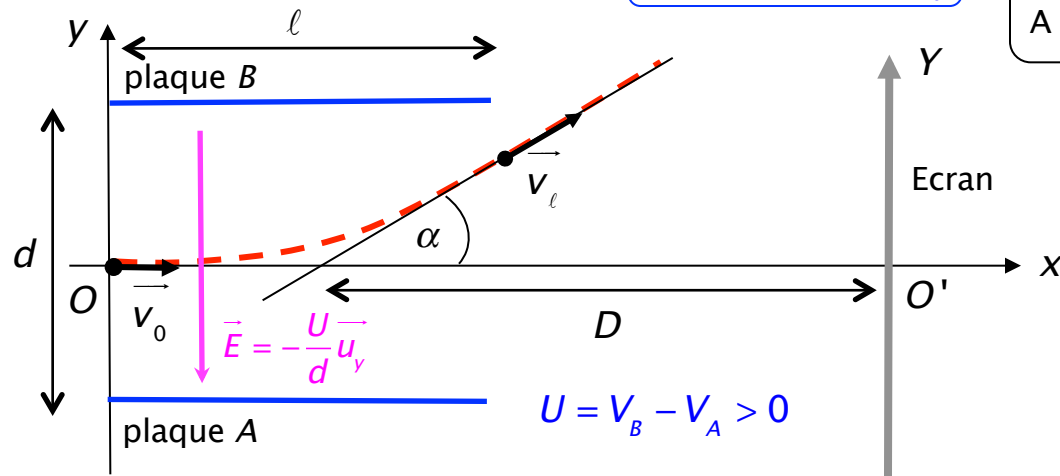
$$\varepsilon_c \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \underset{v \ll c}{\approx} \frac{1}{2}mv^2$$

2-Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

2-3 Déflexion électrostatique

cas étudié: $\vec{E} \perp \vec{v}_0$

Soit un électron $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg et $-q = -1,6 \times 10^{-19}$ C
 A $t = 0$, l'électron est en O avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$



pour $0 < x < \ell \Rightarrow$ mouvement parabolique

pour $x > \ell \Rightarrow$ mouvement rectiligne uniforme car on néglige le poids

• Calcul de la déflexion

On cherche l'équation de la tangente en ℓ
 à la courbe parabolique:

$$y = ax + b, \quad a = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\ell} = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell, \quad y(x = \ell) = \frac{q}{2mv_0^2} \frac{U}{d} \ell^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \quad (y = 0, x = \ell/2)$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{D} = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell \Rightarrow Y = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell D$$

• Application de la 2ème loi de Newton

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{sur (Ox)} \quad \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad v_x = v_0 \quad x = v_0 t$$

$$\Rightarrow \text{sur (Oy)} \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{-qE}{m} \quad v_y = \frac{-qE}{m} t \quad y = \frac{-qE}{2m} t^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{2mv_0^2} \frac{U}{d} x^2 \text{ valable pour } 0 < x < \ell$$

• Application

$\Rightarrow$ Si U et v_0 sont fixés, Y dépend du rapport q/m .

On peut trier les particules selon q/m ,
 principe du **spectrographe de masse**.

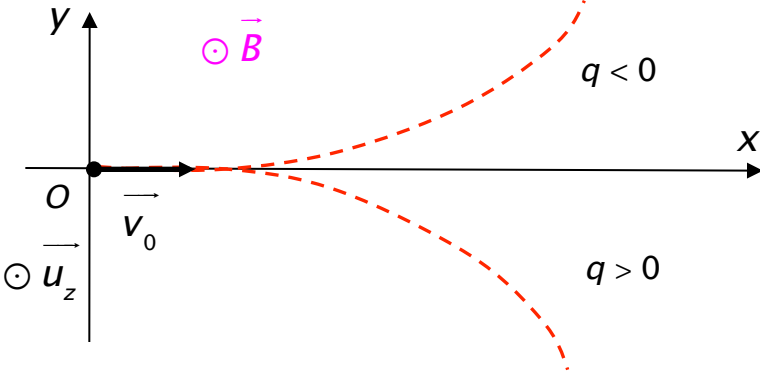
$\Rightarrow$ La déflexion Y est proportionnelle à la tension U ,
 principe du **canon à électron** (tube cathodique, oscilloscope).

3-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

3-1 Mouvement circulaire

cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v}_0$

Soit une particule, masse m , charge q
A $t = 0$, particule en O avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$



• Application de la seconde loi de Newton:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{m} \vec{v} \wedge \vec{u}_z$$

On pose par définition: $\omega \equiv \frac{qB}{m}$ homogène à une pulsation

Equation du mouvement à résoudre: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \vec{v} \wedge \vec{u}_z$

• Projection sur les axes (justification au tableau):

$$\text{Sur Ox: } \frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \quad \text{Sur Oy: } \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \quad \text{Sur Oz: } \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow z = \text{cste} = 0 \quad \forall t$$

$\forall t$, la trajectoire de la particule est dans le plan $xOy \perp \vec{B}$ et (cf page 3) $\|\vec{v}\| = v = \text{constante}$

• Résolution des équations différentielles par découplage (justification au tableau):

3-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

•Résultats:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) &= -\frac{v_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \end{aligned} \right\} \text{Equations paramétriques d'un cercle de rayon } R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B} \text{ et de centre } C\left(0, -\frac{v_0}{\omega}\right)$$

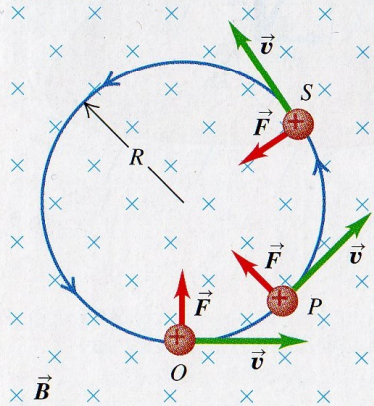
Trajectoire circulaire uniforme à $\omega = \frac{|q|B}{m}$, période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{|q|B}$

•Détermination rapide du rayon de la trajectoire:

27.17 A charged particle moves in a plane perpendicular to a uniform magnetic field $\vec{B}$.

(a) The orbit of a charged particle in a uniform magnetic field

A charge moving at right angles to a uniform $\vec{B}$ field moves in a circle at constant speed because $\vec{F}$ and $\vec{v}$ are always perpendicular to each other.



Si la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ magnétique, **le mouvement est circulaire uniforme**. Si **l'on admet ce résultat**, il est facile de retrouver le rayon de la trajectoire. En effet, pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération vaut (figure 27-17) :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$

L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$-m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r = -|q|vB \vec{u}_r \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}$$

!! A savoir faire !!

3-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

3-2 Applications

Sélecteur de vitesse

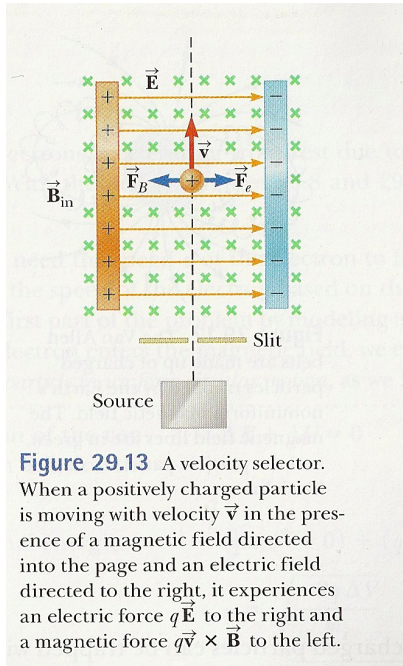


Figure 29.13 A velocity selector. When a positively charged particle is moving with velocity $\vec{v}$ in the presence of a magnetic field directed into the page and an electric field directed to the right, it experiences an electric force $q\vec{E}$ to the right and a magnetic force $q\vec{v} \times \vec{B}$ to the left.

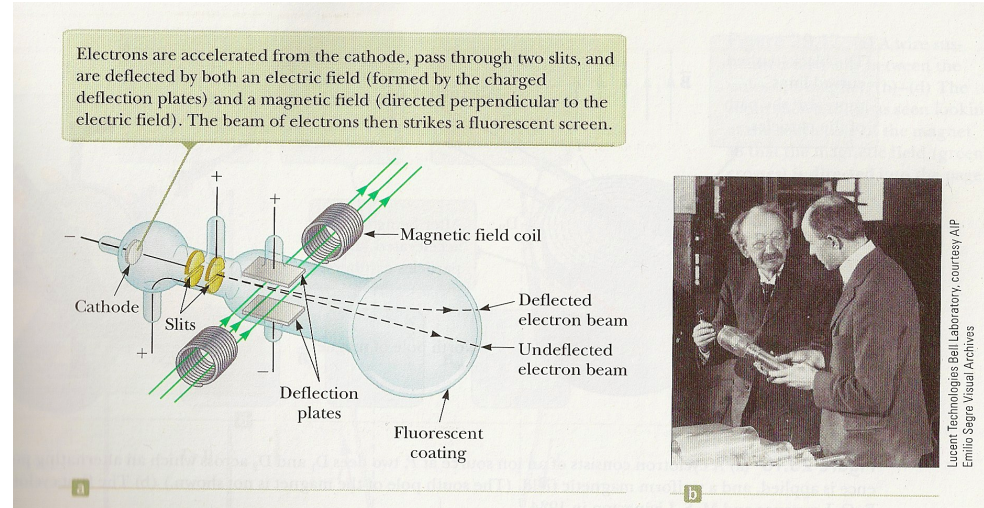
Les particules qui vont tout droit dans le dispositif ci-dessous sont telles que:

$$v = \frac{E}{B}$$

Pourquoi ?

On peut donc sélectionner des particules avec la vitesse désirée en réglant les valeurs des champs.

Spectromètre de masse



Spectromètre utilisé par J. J. Thomson (1856–1940) en 1897 pour mesurer le rapport charge sur masse de l'électron. Cette expérience cruciale a permis la découverte de l'électron comme particule fondamentale de la nature

Un spectromètre de masse (figure 29-14) sépare les particules de telle façon que le rapport masse sur charge soit égal à:

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

Si on a placé un sélecteur de vitesse au préalable et en utilisant la relation de gauche, on obtient:

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0 B}{E}$$

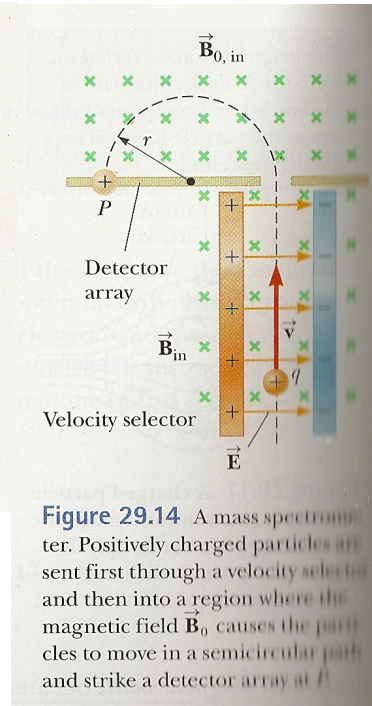


Figure 29.14 A mass spectrometer. Positively charged particles are sent first through a velocity selector and then into a region where the magnetic field $\vec{B}_0$ causes the particles to move in a semicircular path and strike a detector array at P .

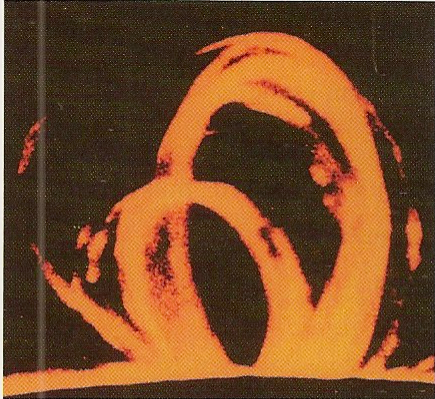
3-Mouvement d' une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

3-3 Mouvement hélicoïdal

$$\text{Cas étudié: } \vec{v}_0 = \underbrace{v_0 \cos \theta \vec{u}_y}_{\parallel \vec{B}} + \underbrace{v_0 \sin \theta \vec{u}_x}_{\perp \vec{B}}$$

Mouvement hélicoïdal = $\left\{ \begin{array}{l} \text{mouvement rectiligne uniforme selon } \vec{u}_y \\ + \\ \text{mouvement circulaire uniforme dans le plan } xOz \\ \text{avec } R = \frac{v_0 \sin \theta}{|\omega|} = \frac{mv_0 \sin \theta}{|q|B} \end{array} \right.$

$$\text{Pas de l'hélice} = y(t+T) - y(t) = T v_0 \cos \theta = \frac{2\pi m v_0 \cos \theta}{|q|B}$$



La forme de ces éruptions solaires montre qu'une force centripète agit sur elles. La seule façon d'expliquer cela est de concevoir que le Soleil produit un puissant champ magnétique.

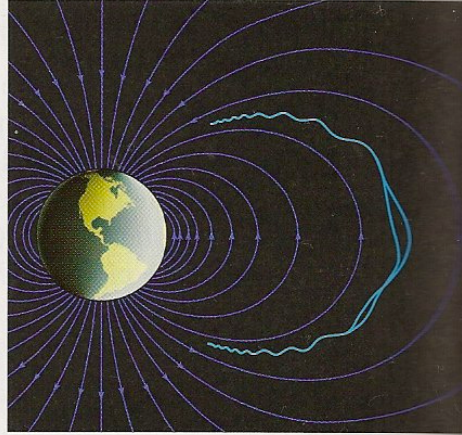
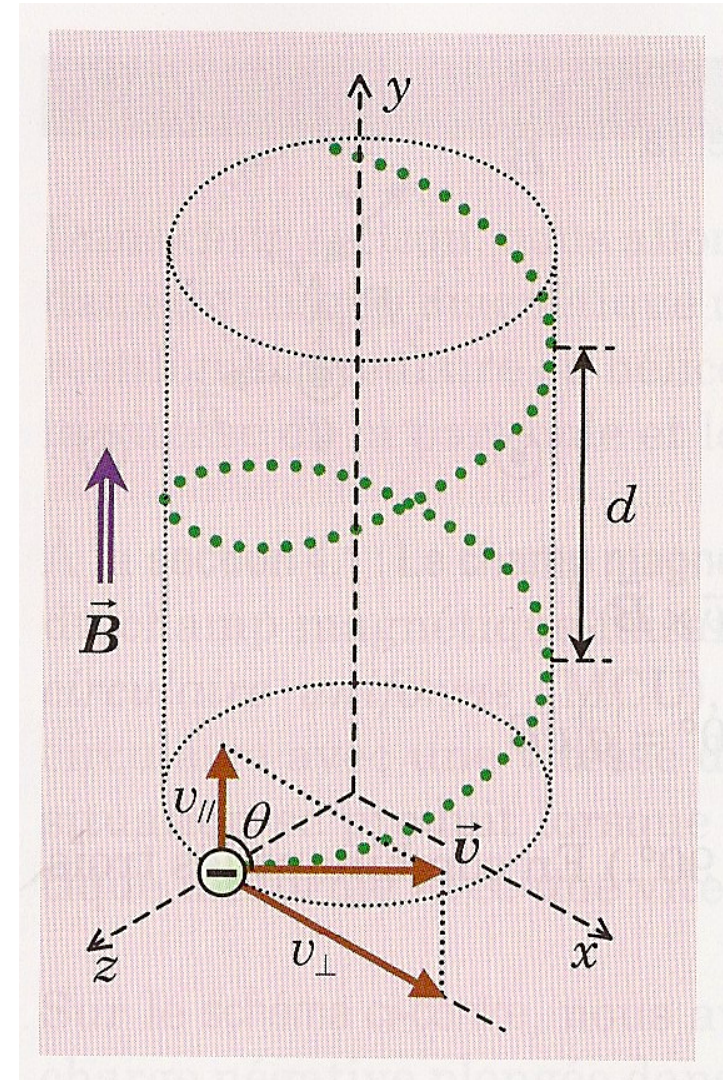


Figure 8.29 ▲

Les protons et les électrons de l'espace sont confinés par le champ magnétique terrestre.



3-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

Calcul numérique de la trajectoire avec Python

Newton $\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \vec{v} \wedge \vec{u}_y$ avec $\omega \equiv -\frac{|q|B}{m} \Rightarrow$ Sur Ox: $\frac{dv_x}{dt} = \omega v_z$ Sur Oy: $\frac{dv_y}{dt} = 0$ Sur Oz: $\frac{dv_z}{dt} = -\omega v_x$

Système d'équations différentielles à résoudre:

$$\begin{cases} dx/dt = v_x & dy/dt = v_y & dz/dt = v_z \\ dv_x/dt = \omega v_z & dv_y/dt = 0 & dv_z/dt = -\omega v_x \end{cases}$$

6 fonctions inconnues du temps:

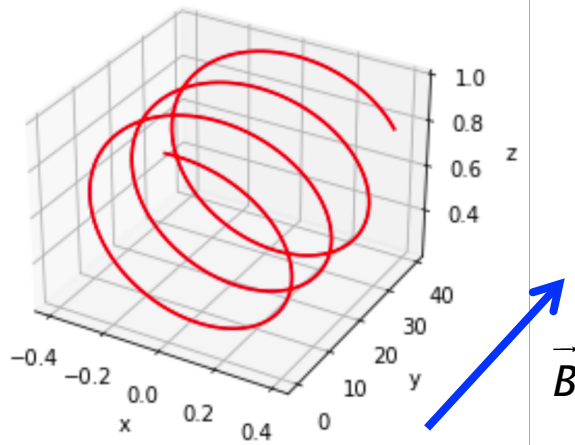
$$x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)$$

Conditions initiales:

$$x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = z_0$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, v_y(t) = v_0 \sin\theta, v_z(t) = 0$$

Trajectoire proton dans B (suivant Oy)

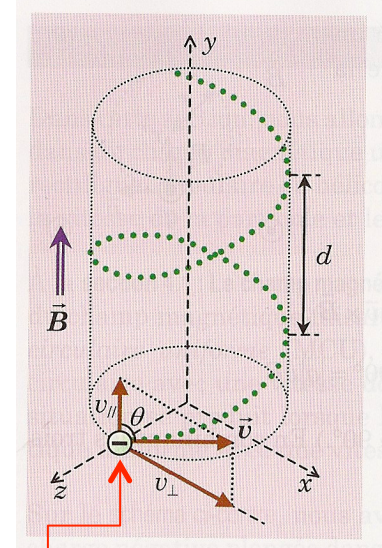


```
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
ax=plt.axes(projection='3d')

def helicoidal(T,n,x0,y0,z0,vx0,vy0,vz0,omega):
    dt=T/float(n)
    t=np.linspace(0,T,n+1)
    x=np.zeros(n+1)
    y=np.zeros(n+1)
    z=np.zeros(n+1)
    vx=np.zeros(n+1)
    vy=np.zeros(n+1)
    vz=np.zeros(n+1)
    x[0]=x0
    y[0]=y0
    z[0]=z0
    vx[0]=vx0
    vy[0]=vy0
    vz[0]=vz0
    #Méthode d'Euler
    for k in range(n):
        x[k+1]=x[k]+dt*vx[k]
        y[k+1]=y[k]+dt*vy[k]
        z[k+1]=z[k]+dt*vz[k]
        vx[k+1]=vx[k]+dt*(omega*vz[k])
        vy[k+1]=vy[k]+dt*(0)
        vz[k+1]=vz[k]+dt*(-omega*vx[k])
    return x,y,z,vx,vy,vz,t
```

```
n=100000
T=60
v0=2
theta=0.2
omega=1
```

```
x,y,z,vx,vy,vz,t = helicoidal(T,n,0,0,1,v0*np.cos(theta),v0*np.sin(theta),0,omega)
ax.plot(x,y,z)
ax.plot3D(x,y,z,'red')
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")
ax.set_title('Trajectoire proton dans B (suivant Oy)')
plt.show()
```



Attention charge négative $\Rightarrow \omega \equiv -\frac{|q|B}{m}$